Разбор задачи «Морской бой»

Предположим, что $w_1 \neq w_2$.

Классифицируем отмеченные клетки на две категории:

1. В первой категории будут клетки, соседние по углу с фигурой, таких клеток 5.

2. Во второй категории будут клетки, соседние по стороне с фигурой, число таких клеток равно $2 \cdot (\max(w_1, w_2) + h_1 + h_2) - 1$ (периметр фигуры минус 1).

Таким образом, ответ в этом случае равен $2 \cdot (max(w_1, w_2) + h_1 + h_2) + 4$.

Заметим, что при $w_1 = w_2$ эта формула тоже корректна.

Асимптотика: $O(1)$.

Разбор задачи «Автобусы»

Обозначим за $lcm(a, b, c)$ наименьшее общее кратное чисел a, b, c.

Легко видеть, что все три автобуса одновременно отправляются от остановки в моменты времени 0, $lcm(a, b, c)$, $2 \cdot lcm(a, b, c)$, $3 \cdot lcm(a, b, c)$, $\ldots$.

Тогда задача сводится к тому, чтобы посчитать сколько чисел на отрезке $[(d - 1) \cdot t; d \cdot t - 1]$ кратны $lcm(a, b, c)$.

Обозначим за $pr(x)$ количество неотрицательных целых чисел, не превосходящих x, которые кратны $lcm(a, b, c)$, тогда $pr(x) = \lfloor \frac{x}{lcm(a,b,c)} \rfloor + 1$ при $x \geqslant 0$ и $pr(x) = 0$ при $x \leqslant -1$.

Количество интересующих нас чисел на произвольном отрезке $[l; r]$ можно выразить следующим образом: $pr(r) - pr(l - 1)$, а, следовательно, ответ на задачу равен $pr(d \cdot t - 1) - pr((d - 1) \cdot t - 1)$.

Асимптотика: $O(\log a + \log b + \log c)$ или $O(a + b + c)$ в зависимости от алгоритма для вычисления $lcm(a, b, c)$.

Разбор задачи «День рождения»

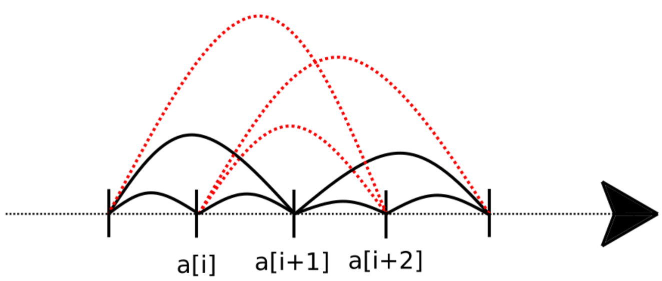
Упорядочим a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n так, что $a_i \leqslant a_{i+1}$.

После этого выпишем в ответ сначала все элементы с нечётными индексами в порядке возрастания, а потом все элементы с чётными индексами в порядке убывания.

Например, если $n = 5$, то выпишем $a_1, a_3, a_5 \mid a_4, a_2$, а если $n = 6$, то $a_1, a_3, a_5 \mid a_6, a_4, a_2$.

Заметим, что данная конструкция приводит к ответу, не превосходящему $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-2} (a_{i+2} - a_i)$.

Покажем, что для любой разницы $a_{i+2} - a_i$ ответ не может быть меньше. Для этого изобразим возможные переходы как граф. Вершинами будут числа a_i, а решению задачи будет соответствовать гамильтонов (то есть проходящий по всем вершинам) цикл.



Попробуем получить ответ меньший $a_{i+2} - a_i$. Красным отмечены запрещённые переходы, черным разрешенные. Несложно видеть, что $a_i + 1$ является точкой сочленения графа и гамильтонова цикла не существует.

Асимптотика: $O(n \log n)$ для сортировки массива и $O(n)$ для последующего построения ответа.

Разбор задачи «Произведение строк»

Заметим, что умножение строк ассоциативно, то есть $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Таким образом, вместо порядка умножения “$(a \cdot b) \cdot c$”, заданного в условии, будем использовать “$a \cdot (b \cdot c)$”

То есть сначала вычислим ответ для s_n, затем для $s_{n-1} \cdot s_n$, затем $s_{n-2} \cdot (s_{n-1} \cdot s_n)$ и так далее.

Поскольку хранить произведение строк целиком не предоставляется возможным (итоговая строка слишком длинная, чтобы уместиться в памяти программы), будем хранить только некоторую базовую информацию о ней, которая позволит нам посчитать ответ:

1. Длина наибольшей подстроки, состоящей из одного символа (ответ на задачу),
2. Состоит ли строка целиком из одного символа,
3. Левый и правый символы строки,
4. Длина префикса, состоящего только из первого символа строки, и длина суффикса, состоящего только из последнего символа строки.

Легко видеть, что если мы знаем эти значения для $s_i \cdot \ldots \cdot s_n$, то мы их можем вычислить для $s_{i-1} \cdot s_i \cdot \ldots \cdot s_n$ за $O(|s_{i-1}|)$.

Асимптотика: $O(\sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|)$.

Разбор задачи «Выбор гурмана»

Эта задача имеет несколько возможных решений.

Одно из них такое — завести структуру данных СНМ (совокупность независимых множеств) для всех $n + m$ блюд и объединить все блюда, которые должны быть оценены одним и тем же числом согласно таблице (объединяем блюда i и $n + j$ если a_{ij} равно "=").

Затем создадим граф и соотнесем каждому множеству в СНМ свою вершину. Переберем все i и j и добавим направленное ребро между вершинами, которые представляют множества, которым принадлежат i и j. Это ребро должно иметь направление от "большей" вершины к "меньшей".

В случае, если граф имеет цикл или петлю, легко увидеть, что ответа не существует. Иначе присваиваем каждой вершине такой номер, чтобы у всех её соседей (куда ведёт направленное ребро от данной вершины) были меньшие номера. Это можно сделать с использованием метода динамического программирования по ацикличному графу.

Асимптотика: $O(nm)$.